MATEMATIKA 2

Gordan Radobolja

PMF

11. travnja 2013.

Parcijalne derivacije

- Promatrajmo funkciju $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ i po volji odabranu točku $T_0 = (x_0, y_0) \in D$.

Parcijalne derivacije

- Promatrajmo funkciju $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ i po volji odabranu točku $T_0 = (x_0, y_0) \in D$.
- Neka je Π_{y_0} ravnina $y = y_0$ i označimo s $D_{y_0} = \Pi_{y_0} \cap D \subseteq D$. Očito je $D_{y_0} \neq \emptyset$ jer sadrži barem točku T_0.

Parcijalne derivacije

- Promatrajmo funkciju $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ i po volji odabranu točku $T_0 = (x_0, y_0) \in D$.
- Neka je Π_{y_0} ravnina $y = y_0$ i označimo s $D_{y_0} = \Pi_{y_0} \cap D \subseteq D$. Očito je $D_{y_0} \neq \emptyset$ jer sadrži barem točku T_0.
- Suženje

$$f\big|_{D_{y_0}} \equiv f_1 : D_{y_0} \to \mathbb{R}$$

smijemo smatrati funkcijom jedne varijable jer se mijenja samo koordinata x. Vrijedi $f_1(x) = f(x, y_0)$.

Parcijalne derivacije

- Promatrajmo funkciju $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ i po volji odabranu točku $T_0 = (x_0, y_0) \in D$.
- Neka je Π_{y_0} ravnina $y = y_0$ i označimo s $D_{y_0} = \Pi_{y_0} \cap D \subseteq D$. Očito je $D_{y_0} \neq \emptyset$ jer sadrži barem točku T_0.
- Suženje

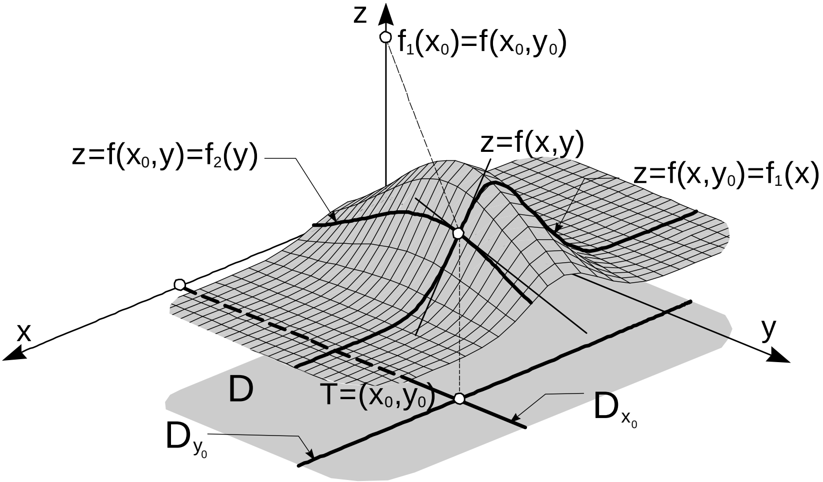
$$f\big|_{D_{y_0}} \equiv f_1 : D_{y_0} \to \mathbb{R}$$

  smijemo smatrati funkcijom jedne varijable jer se mijenja samo koordinata x. Vrijedi $f_1(x) = f(x, y_0)$.
- Analogno imamo funkciju

$$f\big|_{D_{x_0}} \equiv f_2 : D_{x_0} \to \mathbb{R}$$

  koju možemo smatrati funkcijom varijable y. Vrijedi $f_2(y) = f(x_0, y)$.

Parcijalne derivacije



Parcijalne derivacije

Parcijalna derivacija funkcije $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ **po varijabli** x **u točki** $T_0 = (x_0, y_0)$ je derivacija funkcije (jedne varijable) f_1

$$\frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial x} \equiv f_x'\left(x_0, y_0\right) = f_1'\left(x_0\right) = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f_1\left(x\right) - f_1\left(x_0\right)}{x - x_0}.$$

Parcijalne derivacije

Parcijalna derivacija funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ **po varijabli** x **u točki** $T_0 = (x_0, y_0)$ je derivacija funkcije (jedne varijable) f_1

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \equiv f_x'(x_0, y_0) = f_1'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0}.$$

Analogno, **parcijalna derivacija po varijabli** y **u točki** T_0 je derivacija funkcije f_2

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \equiv f_y'(x_0, y_0) = f_2'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f_2(y) - f_2(y_0)}{y - y_0}.$$

Parcijalne derivacije

Parcijalna derivacija funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ **po varijabli** x **u točki** $T_0 = (x_0, y_0)$ je derivacija funkcije (jedne varijable) f_1

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \equiv f'_x(x_0, y_0) = f'_1(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0}.$$

Analogno, **parcijalna derivacija po varijabli** y **u točki** T_0 je derivacija funkcije f_2

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \equiv f'_y(x_0, y_0) = f'_2(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f_2(y) - f_2(y_0)}{y - y_0}.$$

Napomena

Graf $z = f(x, y)$ *funkcije je ploha. Presiječemo li tu plohu ravninom* $x = x_0$ *ili* $y = y_0$ *dobit ćemo ravninske krivulje* Γ_2 *odnosno* Γ_1*, redom. Geometrijska interpretacija parcijalnih derivacija:* $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$ *i* $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$ *su koeficijenti smjera tangente na* Γ_1*, odnosno* Γ_2 *u točki* $T_0(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$.

Parcijalne derivacije

Analogno se definiraju i parcijalne derivacije funkcija tri i više varijabli.

Parcijalne derivacije

Analogno se definiraju i parcijalne derivacije funkcija tri i više varijabli.

Definicija

Parcijalna derivacija *funkcije* $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ **po varijabli** x_i *u točki* $T_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ *je derivacija funkcije jedne varijable* $f_i : D_i \rightarrow \mathbb{R}$, $D_i \subseteq \mathbb{R}$ *definirane s*

$$f_i\left(x\right) = f\left(x_1^0, \ldots x_{i-1}^0, x, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0\right), \qquad x \in D_i$$

u točki x_i^0.

Parcijalne derivacije

Analogno se definiraju i parcijalne derivacije funkcija tri i više varijabli.

Definicija

Parcijalna derivacija *funkcije* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ **po varijabli** x_i *u točki* $T_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ *je derivacija funkcije jedne varijable* $f_i : D_i \to \mathbb{R}$, $D_i \subseteq \mathbb{R}$ *definirane s*

$$f_i\left(x\right) = f\left(x_1^0, \ldots x_{i-1}^0, x, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0\right), \qquad x \in D_i$$

u točki x_i^0. *Dakle,*

$$\frac{\partial f\left(T_0\right)}{\partial x_i} = f_i'\left(x_i^0\right) = \lim_{x \to x_i^0} \frac{f_i\left(x\right) - f_i\left(x_i^0\right)}{x - x_i^0}.$$

Parcijalne derivacije

Analogno se definiraju i parcijalne derivacije funkcija tri i više varijabli.

Definicija

Parcijalna derivacija *funkcije* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ **po varijabli** x_i *u točki* $T_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ *je derivacija funkcije jedne varijable* $f_i : D_i \to \mathbb{R}$, $D_i \subseteq \mathbb{R}$ *definirane s*

$$f_i\left(x\right) = f\left(x_1^0, \ldots x_{i-1}^0, x, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0\right), \qquad x \in D_i$$

u točki x_i^0. *Dakle,*

$$\frac{\partial f\left(T_0\right)}{\partial x_i} = f_i'\left(x_i^0\right) = \lim_{x \to x_i^0} \frac{f_i\left(x\right) - f_i\left(x_i^0\right)}{x - x_i^0}.$$

Za parcijalne derivacije još koristimo i oznake:

$$f_{x_i}'\left(T_0\right) \text{ ili } f_{x_i}\left(T_0\right).$$

Parcijalne derivacije

Definicija

Ako za f *u* T_0 *postoje parcijalne derivacije* $f'_{x_i}(T_0)$ *po svim varijablama* x_i, *onda kažemo da je* f **derivabilna u točki** T_0.

Parcijalne derivacije

Definicija

Ako za f u T_0 postoje parcijalne derivacije $f'_{x_i}(T_0)$ po svim varijablama x_i, onda kažemo da je f **derivabilna u točki** T_0.
Ako je f derivabilna u svakoj točki $T \in D$, onda kažemo da je f **derivabilna funkcija**.

Parcijalne derivacije višeg reda

Definicija

Neka je $A \subseteq D$ *skup svih točaka u kojima postoji parcijalna derivacija* $f'_{x_i}(T)$ *po varijabli* x_i*. Funkciju* $f'_{x_i} : A \to \mathbb{R}$ *zovemo* **parcijalna derivacija funkcije** f **po varijabli** x_i.

Parcijalne derivacije višeg reda

Definicija

Neka je $A \subseteq D$ skup svih točaka u kojima postoji parcijalna derivacija $f'_{x_i}(T)$ po varijabli x_i. Funkciju $f'_{x_i} : A \to \mathbb{R}$ zovemo **parcijalna derivacija funkcije f po varijabli x_i**. *To je opet funkcija od n varijabli koja može imati svoje parcijalne derivacije.*

Parcijalne derivacije višeg reda

Definicija

Neka je $A \subseteq D$ *skup svih točaka u kojima postoji parcijalna derivacija* $f'_{x_i}(T)$ *po varijabli* x_i. *Funkciju* $f'_{x_i} : A \to \mathbb{R}$ *zovemo* **parcijalna derivacija funkcije** f **po varijabli** x_i. *To je opet funkcija od n varijabli koja može imati svoje parcijalne derivacije. Parcijalnu derivaciju funkcije* f'_{x_i} *po varijabli* x_j *zovemo* **parcijalna derivacija drugog reda funkcije** f **po varijablama** x_i, x_j *i označavamo*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \text{ ili } f''_{x_i x_j} \text{ ili } f_{x_i x_j}.$$

Parcijalne derivacije višeg reda

Definicija

Neka je $A \subseteq D$ *skup svih točaka u kojima postoji parcijalna derivacija* $f'_{x_i}(T)$ *po varijabli* x_i. *Funkciju* $f'_{x_i} : A \to \mathbb{R}$ *zovemo* **parcijalna derivacija funkcije** f **po varijabli** x_i. *To je opet funkcija od* n *varijabli koja može imati svoje parcijalne derivacije. Parcijalnu derivaciju funkcije* f'_{x_i} *po varijabli* x_j *zovemo* **parcijalna derivacija drugog reda funkcije** f **po varijablama** x_i, x_j *i označavamo*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \text{ ili } f''_{x_i x_j} \text{ ili } f_{x_i x_j}.$$

Analogno definiramo parcijalnu derivaciju m-tog reda funkcije f *po varijablama* $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$, *gdje je* $i_1, i_2, \ldots, i_m \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_m}} \text{ ili } f^{(m)}_{x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m}} \text{ ili } f_{x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m}},$$

Primjer

Funkcija $f(x, y) = \sin(x + y^2)$ *je dobro definirana na* $D = \mathbb{R}$ *te ima parcijalne derivacije svakog reda. Postupak deriviranja je jednostavan: kad računamo* $f'_x(x, y)$ *varijablu* y *u izrazu za* $f(x, y)$ *tretiramo kao konstantu, a kad računamo* $f'_y(x, y)$, *onda varijablu* x *u izrazu* $f(x, y)$ *tretiramo kao konstantu.*

Primjer

Funkcija $f(x,y) = \sin\left(x+y^2\right)$ *je dobro definirana na* $D = \mathbb{R}$ *te ima parcijalne derivacije svakog reda. Postupak deriviranja je jednostavan: kad računamo* $f_x'(x,y)$ *varijablu* y *u izrazu za* $f(x,y)$ *tretiramo kao konstantu, a kad računamo* $f_y'(x,y)$, *onda varijablu* x *u izrazu* $f(x,y)$ *tretiramo kao konstantu.*
Dakle

$$\begin{aligned} f_x'(x,y) &= \frac{\partial\left[\sin\left(x+y^2\right)\right]}{\partial x} = \cos\left(x+y^2\right), \\ f_y'(x,y) &= \frac{\partial\left[\sin\left(x+y^2\right)\right]}{\partial y} = 2y\cos\left(x+y^2\right). \end{aligned}$$

Parcijalne derivacije višeg reda

Slično postupamo kod računanja parcijalnih derivacija višeg reda. Npr. parcijalne derivacije drugog reda su

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial\left[f'_x(x,y)\right]}{\partial x} = \frac{\partial\left[\cos\left(x+y^2\right)\right]}{\partial x} = -\sin\left(x+y^2\right),$$

Parcijalne derivacije višeg reda

Slično postupamo kod računanja parcijalnih derivacija višeg reda. Npr. parcijalne derivacije drugog reda su

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial\left[f'_x(x,y)\right]}{\partial x} = \frac{\partial\left[\cos\left(x+y^2\right)\right]}{\partial x} = -\sin\left(x+y^2\right),$$

$$f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial\left[f'_x(x,y)\right]}{\partial y} = \frac{\partial\left[\cos\left(x+y^2\right)\right]}{\partial y} = -2y\sin\left(x+y^2\right),$$

Parcijalne derivacije višeg reda

Slično postupamo kod računanja parcijalnih derivacija višeg reda. Npr. parcijalne derivacije drugog reda su

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial\left[f'_x(x,y)\right]}{\partial x} = \frac{\partial\left[\cos\left(x+y^2\right)\right]}{\partial x} = -\sin\left(x+y^2\right),$$

$$f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial\left[f'_x(x,y)\right]}{\partial y} = \frac{\partial\left[\cos\left(x+y^2\right)\right]}{\partial y} = -2y\sin\left(x+y^2\right),$$

$$f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial\left[f'_y(x,y)\right]}{\partial x} = \frac{\partial\left[2y\cos\left(x+y^2\right)\right]}{\partial x} = -2y\sin\left(x+y^2\right),$$

Parcijalne derivacije višeg reda

Slično postupamo kod računanja parcijalnih derivacija višeg reda. Npr. parcijalne derivacije drugog reda su

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial\left[f'_x(x,y)\right]}{\partial x} = \frac{\partial\left[\cos\left(x+y^2\right)\right]}{\partial x} = -\sin\left(x+y^2\right),$$

$$f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial\left[f'_x(x,y)\right]}{\partial y} = \frac{\partial\left[\cos\left(x+y^2\right)\right]}{\partial y} = -2y\sin\left(x+y^2\right),$$

$$f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial\left[f'_y(x,y)\right]}{\partial x} = \frac{\partial\left[2y\cos\left(x+y^2\right)\right]}{\partial x} = -2y\sin\left(x+y^2\right),$$

$$\begin{aligned} f''_{yy}(x,y) &= \frac{\partial\left[f'_y(x,y)\right]}{\partial y} = \frac{\partial\left[2y\cos\left(x+y^2\right)\right]}{\partial y} = \\ &= 2\cos\left(x+y^2\right) - 4y^2\sin\left(x+y^2\right). \end{aligned}$$

Schwartzov teorem

U prethodnom primjeru je $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$. To nije slučajnost:

Schwartzov teorem

U prethodnom primjeru je $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$. To nije slučajnost:

Teorem (Schwartzov)

Neka je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, derivabilna na nekoj okolini $K((x_0,y_0),\delta) \subseteq D$ i neka f ima u toj okolini i parcijalnu derivaciju drugoga reda po x i y redom, f''_{xy}. Ako je funkcija

$$f''_{xy}\big|_{K((x_0,y_0),\delta)} : K((x_0,y_0),\delta) \to \mathbb{R}$$

neprekidna u točki (x_0,y_0), onda postoji parcijalna derivacija drugoga reda funkcije f po y i x redom u točki (x_0,y_0) i pritom je

$$f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0).$$

Schwartzov teorem

U prethodnom primjeru je $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$. To nije slučajnost:

Teorem (Schwartzov)

Neka je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, derivabilna na nekoj okolini $K((x_0, y_0), \delta) \subseteq D$ i neka f ima u toj okolini i parcijalnu derivaciju drugoga reda po x i y redom, f''_{xy}. Ako je funkcija

$$f''_{xy}\Big|_{K((x_0,y_0),\delta)} : K((x_0, y_0), \delta) \to \mathbb{R}$$

neprekidna u točki (x_0, y_0), onda postoji parcijalna derivacija drugoga reda funkcije f po y i x redom u točki (x_0, y_0) i pritom je

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Napomena

Schwartzov teorem možemo poopćiti i na više derivacije (ako su neprekidne), tj. opet nije bitan poredak deriviranja.

Schwartzov teorem

Za funkciju <u>dviju</u> varijabla možemo promatrati ukupno $2^3 = 8$ parcijalnih derivacija trećeg reda:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x \partial x \partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x \partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x},$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial y}$$

Schwartzov teorem

Za funkciju dviju varijabla možemo promatrati ukupno $2^3 = 8$ parcijalnih derivacija trećeg reda:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x \partial x \partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x \partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x},$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial y}$$

Međutim, koristeći Schwartzov teorem promatramo samo 4 parcijalne derivacije trećeg reda (uz razumljivu pretpostavku o neprekidnosti).

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}.$$

Schwartzov teorem

Za funkciju dviju varijabla možemo promatrati ukupno $2^3 = 8$ parcijalnih derivacija trećeg reda:

$$\begin{array}{cccc}
\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial x}, & \dfrac{\partial f}{\partial x \partial x \partial y}, & \dfrac{\partial f}{\partial x \partial y \partial x}, & \dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x}, \\
\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial x}, & \dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}, & \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial y}, & \dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial y}
\end{array}$$

Međutim, koristeći Schwartzov teorem promatramo samo 4 parcijalne derivacije trećeg reda (uz razumljivu pretpostavku o neprekidnosti).

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}.$$

Općenito, za $r \in \mathbb{N}$ postoji 2^r parcijalnih derivacija r-tog reda, ali ih različitih ima samo $r + 1$ i označavamo ih s

$$\frac{\partial^r f}{\partial x^i \partial y^{r-i}}, \quad i = 0, 1, \ldots, r.$$

Primjer

Odredimo sve parcijalne derivacije drugoga reda i treće parcijalne derivacije po x, y i x redom, te po x, x, i y redom (ondje gdje postoje) za funkciju

$$f : D \to \mathbb{R},\ D \subseteq \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^2y + x\ln y.$$

Schwartzov teorem

Primjer

Odredimo sve parcijalne derivacije drugoga reda i treće parcijalne derivacije po x, y i x redom, te po x, x, i y redom (ondje gdje postoje) za funkciju

$$f : D \to \mathbb{R},\ D \subseteq \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^2 y + x \ln y.$$

Definicijsko područje D je otvorena poluravnina $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ i funkcija f je derivabilna. Pritom je, u bilo kojoj točki $(x,y) \in D$,

$$f'_x(x,y) = 2xy + \ln y, \quad f'_y(x,y) = x^2 + \frac{x}{y}.$$

Primjer

Primijetimo da su i obje parcijalne derivacije derivabilne funkcije, tj. da je funkcija f dvaput derivabilna, i da je

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= 2y, \quad f''_{yx}(x,y) = 2x + \frac{1}{y}, \\ f''_{xy}(x,y) &= 2x + \frac{1}{y}, \quad f''_{yy}(x,y) = -\frac{x}{y^2}. \end{aligned}$$

Primjer

Primijetimo da su i obje parcijalne derivacije derivabilne funkcije, tj. da je funkcija f dvaput derivabilna, i da je

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= 2y, \quad f''_{yx}(x,y) = 2x + \frac{1}{y}, \\ f''_{xy}(x,y) &= 2x + \frac{1}{y}, \quad f''_{yy}(x,y) = -\frac{x}{y^2}. \end{aligned}$$

Napokon, očito je da je f i triput (zapravo, po volji mnogo puta) derivabilna i da je $f'''_{xyx}(x,y) = 2 = f'''_{yxx}(x,y)$.

Primjer

Promatrajmo funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *zadanu propisom*

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Primjer

Promatrajmo funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *zadanu propisom*

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} .$$

Funkcija f *je derivabilna na* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ *i pritom je*

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= y \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right), \\ f'_y(x, y) &= x \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right). \end{aligned}$$

Schwartzov teorem

Primjer

Promatrajmo funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *zadanu propisom*

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Funkcija f *je derivabilna na* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *i pritom je*

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= y\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right), \\ f'_y(x,y) &= x\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right). \end{aligned}$$

Nadalje, obje ove parcijalne derivacije su derivabilne funkcije na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *i vrijedi:*

Primjer

$$f''_{yx}(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\left(1+\frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = f''_{xy}(x,y).$$

Primjer

$$f''_{yx}(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\left(1 + \frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = f''_{xy}(x,y).$$

Pogledajmo sada što je s derivabilnošću u točki $(0,0)$*!*

Primjer

$$f''_{yx}(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\left(1+\frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = f''_{xy}(x,y).$$

Pogledajmo sada što je s derivabilnošću u točki $(0,0)$*!*
Budući je $f(x,0)=0$ *za svaki* $x \in \mathbb{R}$ *i* $f(0,y)=0$ *za svaki* $y \in \mathbb{R}$*,* f *je derivabilna i u* $(0,0)$ *i vrijedi*

$$f'_x(0,0) = 0 = f'_y(0,0).$$

Primjer

$$f''_{yx}(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\left(1 + \frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = f''_{xy}(x,y).$$

Pogledajmo sada što je s derivabilnošću u točki $(0,0)$*!*
Budući je $f(x,0) = 0$ *za svaki* $x \in \mathbb{R}$ *i* $f(0,y) = 0$ *za svaki* $y \in \mathbb{R}$, f *je derivabilna i u* $(0,0)$ *i vrijedi*

$$f'_x(0,0) = 0 = f'_y(0,0).$$

Primijetimo da je

$$f'_x(x,0) = 0, \quad f'_y(x,0) = x, \quad f'_x(0,y) = -y, \quad f'_y(0,y) = 0,$$

pa za druge mješovite parcijalne derivacije funkcije f *u točki* $(0,0)$ *dobivamo:*

Schwartzov teorem

Primjer

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f'_x(0,y) - f'_x(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{-y - 0}{y} = -1,$$

Primjer

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f'_x(0,y) - f'_x(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{-y - 0}{y} = -1,$$

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f'_y(x,0) - f'_y(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x - 0}{x} = 1.$$

Schwartzov teorem

Primjer

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f'_x(0,y) - f'_x(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{-y-0}{y} = -1,$$

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'_y(x,0) - f'_y(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = 1.$$

Dakle, funkcija f je dvaput derivabilna. Međutim, "mješovite" druge parcijalne derivacije $f''_{xy}(0,0)$ i $f''_{yx}(0,0)$ su međusobno različite!

Schwartzov teorem

Primjer

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f'_x(0,y) - f'_x(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{-y-0}{y} = -1,$$

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'_y(x,0) - f'_y(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = 1.$$

Dakle, funkcija f je dvaput derivabilna. Međutim, "mješovite" druge parcijalne derivacije $f''_{xy}(0,0)$ i $f''_{yx}(0,0)$ su međusobno različite!
Uzrok, dakako, leži u tome što funkcija f''_{xy} ima prekid u točki $(0,0)$ pa nisu ispunjeni uvjeti Schwartzovog teorema.

Derivabilnost i neprekidnost

Za funkcije jedne varijable je derivabilnost povlačila neprekidnost. No, za funkcije više varijabli to općenito ne vrijedi!

Derivabilnost i neprekidnost

Za funkcije jedne varijable je derivabilnost povlačila neprekidnost. No, za funkcije više varijabli to općenito ne vrijedi!

Primjer

Pokazali smo da funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *zadana propisom*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ima prekid u $(0,0)$ *(* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *ne postoji).*

Derivabilnost i neprekidnost

Za funkcije jedne varijable je derivabilnost povlačila neprekidnost. No, za funkcije više varijabli to općenito ne vrijedi!

Primjer

Pokazali smo da funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *zadana propisom*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ima prekid u $(0,0)$ *(* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *ne postoji). Međutim,* f *je derivabilna u točki* $(0,0)$*. Naime*

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x\cdot 0}{x^2+0^2} - 0}{x-0} = 0,$$

a slično se pokaže da je i $f_y(0,0) = 0$*.*